《概率论与数理统计》期中试卷

2020/2021 学年第一学期 院系________________

学号__________________姓名______________ 考试成绩__________

题号	一40分	二12分	三12分	四12分	五12分	六12分	总分
得分							

一. 简答题(8×5分）

1. 设某小镇有100辆出租车，车牌号从1001到1100.有一个外地人到该镇出差，共乘出租车30次.求所乘过的出租车最大牌号为1050的概率？

2.有4个工人生产同一种产品，某天他们分别生产了这种产品的$0.1, 0.2, 0.4, 0.3$。如果他们的产品的次品率分别为$0.1, 0.15, 0.15, 0.1$，今从混在一起的这批产品中任取一件，若已知取出的是次品，求它是第三个工人生产的概率。

3. 设$P(B)=0.4, P(A\cup B)=0.75, P(B-A)=1/3$, 计算$P(B|A)$。

4. 设随机变量$X \sim N(5, \sigma^2)$，$P(X < 1) = 0.1$，求$P(5 < X < 9)$。

5. 设随机变量X, Y, Z相互独立，且$X \sim U[0, 2], Y \sim N(0, 4), Z \sim E(0.5)$，设$W = X - Y + 3Z$，求期望$E(W)$。

二. (12分) 设随机变量$X \sim E(\lambda)$，$\lambda > 0$为常数。试求$Y = 1 - e^{-\lambda X}$的分布函数。

三. (12 分) 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$p(x,y)=\begin{cases}kx & 0<x<y<1\\ 0 & \text{其它。}\end{cases}$$

试求：(1).k；(2).$P(X+Y<1)$。

四. (12分) 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$p(x,y)=\begin{cases}24xy & x>0,y>0,x+y<1\\ 0 & \text{其它。}\end{cases}$$

(1) 求X,Y的边缘密度；（2）求X,Y的相关系数。

五. (12分) 设随机变量X,Y相互独立，$P(X=1)=P(X=2)=\frac{1}{2}$，$Y$服从指数分布$E(1)$，求$X+Y$的概率密度函数。

六. (12 分) 三个人将自己的身份证放在一个盒子中，然后依次从盒中取出一个身份证。问取对身份证的人数的期望。

《概率论与数理统计》期中试卷

2022/2023 学年第一学期 院系________________

学号__________________姓名______________ 考试成绩__________

题号	一40分	二12分	三12分	四12分	五12分	六12分	总分
得分							

一. 简答题(8×5分）

1. 在房间里有10人，分别戴1到10号的号码牌，现有放回地抽取3人。求最小号码恰为7的概率？

2.有3个工人生产同一种产品，某天他们分别生产了这种产品的$0.2, 0.4, 0.4$。如果他们的产品的次品率分别为$0.1, 0.15, 0.15$，今从混在一起的这批产品中任取一件，若已知取出的是次品，求它是第三个工人生产的概率。

3. 设$P(A) = 1/4, P(A|B) = 0.5, P(B|A) = 1/3$, 计算$P(B)$。

4. 设随机变量X, Y相互独立，且$X \sim U[0,1], Y \sim E(1)$ 求以a为未知数的方程$a^2 + Xa + Y^2 = 0$有实根的概率。

5. 设随机变量X, Y相互独立，且$X \sim U[0,2], Y \sim E(0.5)$，设$W = X - 3Y$，求方差$D(W)$。

二. (12分) 设随机变量$X \sim U[0, \pi]$，试求$Y = \sin X$的密度函数。

三. (12分) 设顾客到达某理发店后需要等候的服务时间X服从参数为0.2的指数分布，若顾客等候时间超过10分钟就会离开。每位顾客的等候时间相互独立，试求50个顾客中因等候时间超过10分钟而离开的人数的分布律。

四. (12分) 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$p(x,y)=\begin{cases}1 & x>|y|,0<x<1\\ 0 & \text{其它。}\end{cases}$$

(1) 求X,Y的边缘密度；(2) 求X,Y的相关系数；(3) X,Y是否独立？

五. (12分) 设二维随机变量(X, Y)的概率密度为

$$p(x, y) = \begin{cases} kx & 0 < y < x < 1 \\ 0 & \text{其它。} \end{cases}$$

试求：(1).k；(2).求$X + Y$的概率密度函数。

六. (12 分) 10个球随机放入10个盒子，X表示有球的盒子数。求X的期望。

《概率论与数理统计》期中试卷

2023/2024 学年第一学期　院系____________　任课老师_________

学号________________　姓名____________　考试成绩_________

题号	一40分	二10分	三10分	四15分	五15分	六10分	总分
得分							

一. 简答题(8×5分）

1. 袋中有5张卡片,分别写有数字$1, 2, 3, 4, 5$, 从中不放回地随机抽取3张卡片,求取到的3张卡片中最大的数与最小的数之差等于3的概率.

2. 有3个工人生产同一种产品，某天他们分别生产了这种产品的$0.3, 0.3, 0.4$。如果他们的产品的次品率分别为$0.1, 0.3, 0.15$，今从混在一起的这批产品中任取一件，若已知取出的是次品，求它是第三个工人生产的概率。

3. 设$P(A) = 0.4, P(A \cup B) = 0.7$,
(1). 若事件A与B互不相容, 计算$P(B)$; (2).若事件A与B独立,计算$P(B)$.

4. 设随机变量$X \sim N(5, \sigma^2)$，$P(X < 1) = 0.1$，求$P(5 < X < 9)$。

5. 设随机变量X, Y, Z相互独立，且$X \sim U[0, 6], Y \sim N(0, 4), Z \sim P(3)$，设$W = X - 2Y + 3Z$，求期望$E(W)$及方差$D(W)$。

二. (10分) 设随机变量$X \sim N(0, 1)$。试求$Y = \sqrt{|X|}$的密度函数。

解：

三. (10分) 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$p(x,y)=\begin{cases} ky(2-x) & 0\le x<1, 0\le y<x \\ 0 & \text{其它。} \end{cases}$$

试求：(1).k；(2).X,Y的边缘密度函数。

四. (15分) 设随机变量X,Y相互独立，$X\sim U[0,1], Y\sim E(1)$ (1) 求概率$P(X+Y<2)$；(2) 求$Z=X+2Y$的密度函数。

五. (15分) 设$X_1, \cdots, X_n$为相互独立的随机变量,均服从$U(0,1)$.求$E\min\limits_{1\le i\le n} X_i$.

六. (10分) 一商店经销某种商品,每周进货量X服从均匀分布$U[10,20]$,需求量$Y=15$.商店每售出一单位商品可得利润100元，若需求量超过进货量，商店可从其他商店调剂供应，这时每单位商品可得利润50元，若进货量超过需求量，每单位商品需支付库存20元。试计算此商店经营该商品每周平均获利。

《概率论与数理统计》期中试卷

2020/2021 学年第一学期 院系________________

学号________________姓名______________ 考试成绩__________

题号	一40分	二12分	三12分	四12分	五12分	六12分	总分
得分							

一. 简答题(8×5分)

1. 设某小镇有100辆出租车，车牌号从1001到1100.有一个外地人到该镇出差，共乘出租车30次.求所乘过的出租车最大牌号为1050的概率？

解：$P = \frac{50^{30} - 49^{30}}{100^{30}}$

2.有4个工人生产同一种产品，某天他们分别生产了这种产品的$0.1, 0.2, 0.4, 0.3$。如果他们的产品的次品率分别为$0.1, 0.15, 0.15, 0.1$，今从混在一起的这批产品中任取一件，若已知取出的是次品，求它是第三个工人生产的概率。

解：$P = \frac{0.4 \times 0.15}{0.1 \times 0.1 + 0.2 \times 0.15 + 0.4 \times 0.15 + 0.3 \times 0.1} = \frac{6}{13}$

3. 设$P(B) = 0.4, P(A \cup B) = 0.75, P(B - A) = 1/3$, 计算$P(B|A)$。

解：$P(AB) = P(B) - P(B - A) = 1/15, P(A) = P(A \cup B) - P(B - A) = 5/12$

$P(B|A) = 4/25$

4. 设随机变量$X \sim N(5,\sigma^2)$，$P(X<1)=0.1$，求$P(5<X<9)$。

解：$P(5<X<9)=0.5-P(X>9)=0.5-P(X<1)=0.4$

5. 设随机变量X,Y,Z相互独立，且$X \sim U[0,2], Y \sim N(0,4), Z \sim E(0.5)$，设$W=X-Y+3Z$，求期望$E(W)$。

解：$E(W)=E(X)-E(Y)+3E(Z)=1+0+6=7$

二. (12分) 设随机变量$X \sim E(\lambda)$，$\lambda>0$为常数。试求$Y=1-e^{-\lambda X}$的分布函数。

解：

$$F(y)=\begin{cases}1 & y \geq 1\\ y & 0<y<1\\ 0 & y \leq 0\end{cases}$$

三. (12 分) 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$p(x,y)=\begin{cases} kx & 0<x<y<1 \\ 0 & \text{其它。} \end{cases}$$

试求：(1).k；(2).$P(X+Y<1)$。

解：(1).$k=6$

(2).$P(X+Y<1)=1/4$

四. (12分) 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$p(x,y)=\begin{cases} 24xy & x>0,y>0,x+y<1 \\ 0 & \text{其它。} \end{cases}$$

(1) 求X,Y的边缘密度；（2）求X,Y的相关系数。

解：(1).

$$p_X(x)=\begin{cases} 12x(1-x)^2 & 0<x<1 \\ 0 & \text{其它。} \end{cases}$$

$$p_Y(y)=\begin{cases} 12y(1-y)^2 & 0<y<1 \\ 0 & \text{其它。} \end{cases}$$

(2).$EX=EY=2/5, E(XY)=2/15, cov(X,Y)=-2/75$

$DX=DY=1/25, \rho=-2/3$

五. (12分) 设随机变量X, Y相互独立，$P(X=1)=P(X=2)=\frac{1}{2}$，$Y$服从指数分布$E(1)$，求$X+Y$的概率密度函数。

解：

$$p(z)=\begin{cases} 0 & z \le 1 \\ \frac{1}{2}e^{1-z} & 1 < z \le 2 \\ \frac{1}{2}e^{1-z}+\frac{1}{2}e^{2-z} & 2 < z \end{cases}$$

六. (12 分) 三个人将自己的身份证放在一个盒子中，然后依次从盒中取出一个身份证。问取对身份证的人数的期望。

解：$X = X_1 + X_2 + X_3$,X_i为第i个人取对身份证的情况。

$P(X_i = 1) = 1/3, E(X_i) = 1/3, i = 1, 2, 3$

$EX = EX_1 + EX_2 + EX_3 = 1.$

《概率论与数理统计》期中试卷

2022/2023 学年第一学期　院系____________

学号____________姓名__________ 考试成绩________

题号	一40分	二12分	三12分	四12分	五12分	六12分	总分
得分							

一. 简答题(8×5分）

1. 在房间里有10人，分别戴1到10号的号码牌，现有放回地抽取3人。求最小号码恰为7的概率？

解：$P=\frac{4^3-3^3}{10^3}=0.037$

2.有3个工人生产同一种产品，某天他们分别生产了这种产品的$0.2, 0.4, 0.4$。如果他们的产品的次品率分别为$0.1, 0.15, 0.15$，今从混在一起的这批产品中任取一件，若已知取出的是次品，求它是第三个工人生产的概率。

解：$P=\frac{0.4\times 0.15}{0.2\times 0.1+0.4\times 0.15+0.4\times 0.15}=\frac{3}{7}$

3. 设$P(A)=1/4, P(A|B)=0.5, P(B|A)=1/3,$ 计算$P(B)$。

解：$P(AB)=P(A)P(B|A)=1/12, P(B)=P(AB)/P(A|B)=1/6$

4. 设随机变量X,Y相互独立，且$X\sim U[0,1],Y\sim E(1)$ 求以a为未知数的方程$a^2+Xa+Y^2=0$有实根的概率。

解：$P(X^2-4Y^2\geq 0)=\int_0^1 dx\int_0^{x/2} e^{-y}dy=\int_0^1(1-e^{-x/2})dx=2e^{-1/2}-1$

5. 设随机变量X,Y相互独立，且$X\sim U[0,2],Y\sim E(0.5)$，设$W=X-3Y$，求方差$D(W)$。

解：$D(W)=D(X)+9D(Y)=1/3+9\times 4=109/3$

二. (12分) 设随机变量$X\sim U[0,\pi]$，试求$Y=\sin X$的密度函数。

解：

$$p(y)=\begin{cases}\frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}} & 0\leq y\leq 1\\ 0 & \text{其它。}\end{cases}$$

三. (12分) 设顾客到达某理发店后需要等候的服务时间X服从参数为0.2的指数分布，若顾客等候时间超过10分钟就会离开。每位顾客的等候时间相互独立，试求50个顾客中因等候时间超过10分钟而离开的人数的分布律。

解：$Y \sim B(50, p), p = P(X > 10) = e^{-2}$

四. (12分) 设二维随机变量(X, Y)的概率密度为

$$p(x,y) = \begin{cases} 1 & x > |y|, 0 < x < 1 \\ 0 & \text{其它。} \end{cases}$$

(1) 求X, Y的边缘密度；(2）求X, Y的相关系数；(3）X, Y是否独立？

解：(1).

$$p_X(x) = \begin{cases} 2x & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{其它。} \end{cases}$$

$$p_Y(y) = \begin{cases} 1-y & 0 < y < 1 \\ 1+y & -1 < y < 0 \\ 0 & \text{其它。} \end{cases}$$

(2).$EX = 2/3, EY = 0, E(XY) = 0, cov(X, Y) = 0, \rho = 0$

(3).不独立。

五. (12分) 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$p(x,y)=\begin{cases} kx & 0<y<x<1 \\ 0 & \text{其它。} \end{cases}$$

试求：(1).k；(2).求$X+Y$的概率密度函数。

解：1).$k=3$

(2). 当$0<z<1$时，$P(X+Y\le z)=\int\limits_0^{z/2}dy\int\limits_y^{z-y}3xdx=\frac{3}{8}z^3$;

当$1\le z<2$时，$P(X+Y\le z)=1-P(X+Y>z)=1-\int\limits_{z/2}^{1}dx\int\limits_{z-x}^{x}3xdy=\frac{3}{2}z-\frac{z^3}{8}-1$;

$$p(z)=\begin{cases} 0 & \text{其它。} \\ \frac{9}{8}z^2 & 0<z<1 \\ \frac{3}{2}-\frac{3}{8}z^2 & 1\le z<2 \end{cases}$$

六. (12 分) 10个球随机放入10个盒子，X表示有球的盒子数。求X的期望。

解：$X=X_1+X_2+\cdots+X_{10}$,X_i为第i个盒子有球的情况。

$P(X_i=1)=1-P(X_i=0)=1-(9/10)^{10}$,$E(X_i)=1-(9/10)^{10}$,$i=1,2,\ldots,10$

$EX=EX_1+EX_2+\cdots+EX_{10}=10[1-(9/10)^{10}]$.

2023-2024 秋季学期概率统计期中答案及采分点

这里有一个统一标准：密度函数没有写明函数非零区域-1 分。如果期末考试涉及到分布函数。没有把分布函数在整个实轴上的取值都标明-1 分。

一. 简答题 (8×5 分)

1. 袋中有 5 张卡片, 分别写有数字 1,2,3,4,5, 从中不放回地随机抽取 3 张卡片, 求取到的 3 张卡片中最大的数与最小的数之差等于 3 的概率.

解: 最大最小之差等于 3:(1,2,4)(1,3,4)(2,3,5)(2,4,5) 4 分

$$P=\frac{4}{C_5^3}=\frac{4}{10}=0.4 \quad 4\text{ 分}$$

2. 有 3 个工人生产同一种产品, 某天他们分别生产了这种产品的 0.3,0.3,0.4 。如果他们的产品的次品率分别为 0.1,0.3,0.15, 今从混在一起的这批产品中任取一件, 若已知取出的是次品, 求它是第三个工人生产的概率。

解: A_i : 第 i 个工人生产。B： 是次品

$$P(A_3\mid B)=\frac{P(B\mid A_3)P(A_3)}{\sum_{i=1}^{3}P(B\mid A_i)P(A_i)}=\frac{0.15\times 0.4}{0.1\times 0.3+0.3\times 0.3+0.15\times 0.4}$$
$$=\frac{0.06 \quad 4\text{ 分}}{0.18 \quad 4\text{ 分}}=\frac{1}{3}$$

3. 设 $P(A)=0.4, P(A\cup B)=0.7$,

(1). 若事件 A 与 B 互不相容, 计算 $P(B)$; (2). 若事件 A 与 B 独立, 计算 $P(B)$.

解: (1) $P(B)=P(A\cup B)-P(A)=0.3$ 4 分

(2)

$$\begin{aligned}P(A)+P(B)-P(A\cap B)&=P(A\cup B)\\0.4+P(B)-P(A)P(B)&=0.7\\(1-P(A))P(B)&=0.3\\(1-0.4)P(B)&=0.3\\0.6P(B)&=0.3\\P(B)&=0.5\quad 4\text{ 分}\end{aligned}$$

4. 设随机变量 $X\sim N\left(5,\sigma^2\right)$, $P(X<1)=0.1$, 求 $P(5<X<9)$ 。

解: 密度函数关于 $x=5$ 对称，所以 $P(X<1)=P(X>9)=0.1$ 4 分
$P(5<X<9)=P(X>5)-P(X>9)=0.5-0.1=0.4$ 4 分
5. 设随机变量 X,Y,Z 相互独立, 且 $X\sim U[0,6]$, $Y\sim N(0,4)$, $Z\sim P(3)$, 设 $W=X-2Y+3Z$, 求期望 $E(W)$ 及方差 $D(W)$ 。

解:

$$\begin{aligned}E(W)&=E(X)-2E(Y)+3E(Z)\\&=\frac{6}{2}-2\times 0+3\times 3=12\quad 4\text{ 分}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(W)&=\mathrm{Var}(X)+4\mathrm{Var}(Y)+9\mathrm{Var}(Z)\\&=\frac{(6-0)^2}{12}+4\times 4+9\times 3=46\quad 4\text{ 分}\end{aligned}$$

二. (10 分) 设随机变量 $X\sim N(0,1)$ 。试求 $Y=\sqrt{|X|}$ 的密度函数。

解: 令 $T\equiv|X|$。

$$
\begin{aligned}
P(T\le t) &= P(|X|\le t)\\
&= P(-t\le X\le t)\\
&= \Phi(t)-\Phi(-t)\\
&= \Phi(t)-(1-\Phi(t))\\
&= 2\Phi(t)-1
\end{aligned}
$$

$p_T(t)=F_T'(t)=(2\Phi(t)-1)'=2\phi(t)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}, t\ge 0$

$Y=\sqrt{|X|}=\sqrt{T}\Rightarrow T=Y^2, \left|\frac{dT}{dY}\right|=2Y, \quad Y\geqslant 0$

$p_Y(y)=p_T(y^2)|2y|=\frac{4y}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y4}{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}ye^{-\frac{y^4}{2}}, y\ge 0.$

因为没有同学按我这个答案算，所以采分点如下：算出 $P(Y<y)=\Phi(y^2)-\Phi(-y^2)$ 得 5 分。求导算出正确的密度函数得 5 分。

三. (10 分) 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$
p(x,y)=\begin{cases} ky(2-x) & 0\le x<1, 0\le y<x\\ 0 & \text{其它。}\end{cases}
$$

试求: (1). k; (2).X,Y 的边缘密度函数。

解:

(1)

$$
\begin{aligned}
1 &= \int_0^1 \int_0^x p(x,y)\,dy\,dx \\
&= \int_0^1 \int_0^x ky(2-x)\,dy\,dx \\
&= \int_0^1 (2-x)k \int_0^x d\frac{y^2}{2}\,dx \\
&= \int_0^1 (2-x)k\frac{x^2}{2}\,dx \\
&= k\int_0^1 x^2 - \frac{x^3}{2}\,dx \\
&= k\left(\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 - \left.\frac{x^4}{8}\right|_0^1\right) \\
&= \frac{5}{24}k
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow k = \frac{24}{5}$ 2 分

(2) 由 (1) 中第五个等式可以直接带入 k，得到 $p_X(x)$。或者重新计算一遍

$$
p_X(x) = \frac{24}{5}\int_0^x y(2-x)\,dy = \frac{24}{5}\left(x^2 - \frac{x^3}{2}\right), x \in [0,1)
$$

$$
p_X(x) = \begin{cases} \frac{24}{5}\left(x^2 - \frac{x^3}{2}\right), & x \in [0,1) \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}
$$

4 分

$$
\begin{aligned}
P_Y(y) &= \int_y^1 \frac{24}{5}y(2-x)\,dx \\
&= \frac{24}{5}y\left(\left.2x\right|_y^1 - \left.\frac{x^2}{2}\right|_y^1\right) \\
&= \frac{24}{5}y\left(\frac{3}{2} - 2y + \frac{y^2}{2}\right), y \in [0,1)
\end{aligned}
$$

$$p_Y(y)=\begin{cases}\frac{24}{5}y\left(\frac{3}{2}-2y+\frac{y^2}{2}\right), & y\in[0,1)\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

4 分

四. (15 分) 设随机变量 X, Y 相互独立, $X\sim U[0,1], Y\sim E(1)$ (1) 求概率 $P(X+Y<2)$; (2) 求 $Z=X+2Y$ 的密度函数。

解:

(1)

$$\begin{aligned} p(X+Y<2) &= \int_0^1\int_0^{2-x} e^{-y}dydx \\ &= \int_0^1 -e^{-y}\Big|_0^{2-x}dx \\ &= \int_0^1 1-e^{x-2}dx \\ &= 1-e^{-2}\int_0^1 e^x dx \\ &= 1-e^{-2}\left(e^1-1\right) \\ &= 1-e^{-1}+e^{-2} \end{aligned}$$

6 分

（2）当 $0\leqslant z\leqslant 1$

$$\begin{aligned} P(Z\leqslant z) &= \int_0^z\int_0^{\frac{z-x}{2}} e^{-y}dydx \\ &= \int_0^z 1-e^{\frac{x-z}{z}}dx \\ &= z-e^{-\frac{z}{2}}\cdot 2e^{\frac{x}{2}}\Big|_0^z \\ &= z-2e^{-\frac{z}{2}}\left(e^{\frac{z}{2}}-1\right) \\ &= z-2+2e^{-\frac{z}{2}} \end{aligned}$$

$\Rightarrow p_Z(z)=\left(z-2+2e^{-\frac{z}{2}}\right)'=1-e^{-\frac{z}{2}}, z\in[0,1]$　4 分

当 $z>1$

$$
\begin{aligned}
p(Z\le z) &= \int_0^1\int_0^{\frac{z-x}{2}} e^{-y}dydx \\
&= 1-e^{-\frac{z}{2}}\cdot 2e^{\frac{x}{2}}\Big|_0^1 \\
&= 1-2e^{-\frac{z-1}{2}}+2e^{-\frac{z}{2}}
\end{aligned}
$$

综上:

$$
p_Z(z)=\begin{cases}0, & z\in(-\infty,0)\\ 1-e^{-\frac{z}{2}}, & z\in[0,1]\\ e^{-\frac{z-1}{2}}-e^{-\frac{z}{2}}, & z\in(1,\infty)\end{cases}
$$

5 分

五. (15 分) 设 $X_1,\cdots,X_n$ 为相互独立的随机变量, 均服从 $U(0,1)$. 求 $E\min_{1\le i\le n}X_i$.

解: 令 $X_{(1)}\equiv\min_{1\le i\le n}X_i$。当 $x\in(0,1)$, $F_{X_{(1)}}(x)=1-(1-x)^n$

$p(x)=F'_{X_{(1)}}(x)=n(1-x)^{n-1}, x\in(0,1)$ 9 分

$$
\begin{aligned}
E(X_{(1)}) &= \int_0^1 xn(1-x)^{n-1}dx \\
&\overset{t=1-x}{=} \int_1^0 -(1-t)nt^{n-1}dt \\
&= \int_0^1 (1-t)nt^{n-1}dt \\
&= \int_0^1 (1-t)dt^n \\
&= -\int_0^1 t^n d(1-t) \\
&= \int_0^1 t^n dt \\
&= \frac{1}{n+1}
\end{aligned}
$$

6 分

六. (10 分) 一商店经销某种商品, 每周进货量 X 服从均匀分布 $U[10,20]$, 需求量 $Y=15$. 商店每售出一单位商品可得利润 100 元, 若需求量超过进货量, 商店可从

其他商店调剂供应，这时每单位商品可得利润 50 元，若进货量超过需求量，每单位商品需支付库存 20 元。试计算此商店经营该商品每周平均获利。

解: 令 $T \equiv$ 获利

$$T = \begin{cases} 100X + 50(15 - X), & 0 \le X \le 15 \\ 100 \times 15 - 20(X - 15), & 15 \le X \le 20 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$

5 分

$$\begin{aligned} E(T) &= \int_{-\infty}^{+\infty} t p_X(x) dx \\ &= \int_{10}^{20} t \frac{1}{20-10} dx \\ &= \int_{10}^{20} t \frac{1}{10} dx \\ &= \int_{10}^{15} \frac{750 + 50x}{10} dx + \int_{15}^{20} \frac{1800 - 20x}{10} dx \\ &= 375 + \frac{5}{2} x^2 \Big|_{10}^{15} + 900 - x^2 \Big|_{15}^{20} \\ &= 1275 + 312.5 - 175 \\ &= 1412.5(\text{元}) \end{aligned}$$

5 分

《概率论与数理统计》期中试卷

2023/2024 学年第一学期 院系____________ 任课老师_________

学号________________ 姓名____________ 考试成绩_________

题号	一40分	二10分	三10分	四15分	五15分	六10分	总分
得分							

一. 简答题(8×5分)

1. 袋中有5张卡片,分别写有数字$1,2,3,4,5$, 从中不放回地随机抽取3张卡片,求取到的3张卡片中最大的数与最小的数之差等于3的概率.

解：$P=\frac{4}{C_5^3}=0.4$

2. 有3个工人生产同一种产品，某天他们分别生产了这种产品的$0.3,0.3,0.4$。如果他们的产品的次品率分别为$0.1,0.3,0.15$，今从混在一起的这批产品中任取一件，若已知取出的是次品，求它是第三个工人生产的概率。

解：$P=\frac{0.4*0.15}{0.3*0.1+0.3*0.3+0.4*0.15}=\frac{1}{3}$

3. 设$P(A)=0.4,P(A\cup B)=0.7$,

(1). 若事件A与B互不相容, 计算$P(B)$; (2).若事件A与B独立,计算$P(B)$.

解: (1).$P(B)=0.3$; (2).$P(B)=0.5$

4. 设随机变量$X \sim N(5,\sigma^2)$，$P(X<1)=0.1$，求$P(5<X<9)$。

解：$P(5<X<9)=0.5-P(X>9)=0.5-P(X<1)=0.4$

5. 设随机变量X,Y,Z相互独立，且$X\sim U[0,6],Y\sim N(0,4),Z\sim P(3)$，设$W=X-2Y+3Z$，求期望$E(W)$及方差$D(W)$。

解：$EW=12,DW=46$

二. (10分) 设随机变量$X\sim N(0,1)$。试求$Y=\sqrt{|X|}$的密度函数。

解：

$$F_Y(y)=P(\sqrt{|X|}\le y)=\begin{cases}2\int_0^{y^2}\phi(x)dx & y\ge 0\\ 0 & \text{其它。}\end{cases}$$

$$p_Y(y)=\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}ye^{-\frac{y^4}{2}} & y\ge 0\\ 0 & \text{其它。}\end{cases}$$

三. (10分) 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$p(x,y)=\begin{cases} ky(2-x) & 0\le x<1, 0\le y<x \\ 0 & \text{其它。} \end{cases}$$

试求：(1).k；(2).X,Y的边缘密度函数。

解：$k=4.8$

$$p_X(x)=\begin{cases} 2.4x^2(2-x) & 0\le x<1 \\ 0 & \text{其它。} \end{cases}$$

$$p_Y(y)=\begin{cases} 2.4y(3-4y+y^2) & 0\le y<1 \\ 0 & \text{其它。} \end{cases}$$

四. (15分) 设随机变量X,Y相互独立，$X\sim U[0,1], Y\sim E(1)$ (1) 求概率$P(X+Y<2)$；（2）求$Z=X+2Y$的密度函数。

解：$P(X+Y<2)=\int_0^1(\int_0^{2-x}p(x,y)dy)dx=1-e^{-1}+e^{-2}$

$$p_Z(z)=\int p_X(x)p_{2Y}(z-x)dx=\int_0^1 p_{2Y}(z-x)dx=\begin{cases} 0 & z<0 \\ \int_0^z \frac{1}{2}-e^{-(z-x)/2}dx & 0\le z<1 \\ \int_0^1 \frac{1}{2}-e^{-(z-x)/2}dx & 1\le z \end{cases}$$

因此得到：

$$p_Z(z)=\begin{cases} 0 & z<0 \\ 1-e^{-z/2} & 0\le z<1 \\ (e^{1/2}-1)e^{-z/2} & 1\le z \end{cases}$$

五. (15分) 设$X_1,\cdots,X_n$为相互独立的随机变量,均服从$U(0,1)$.求$E\min\limits_{1\le i\le n}X_i$.
解：$\min\limits_{1\le i\le n}X_i$的密度函数为：

$$p(z)=\begin{cases}n(1-z)^{n-1} & 0\le z<1\\ 0 & \text{其它。}\end{cases}$$

$E\min\limits_{1\le i\le n}X=\int_0^1 nz(1-z)^{n-1}dz=\frac{1}{n+1}$

六. (10分) 一商店经销某种商品,每周进货量X服从均匀分布$U[10,20]$,需求量$Y=15$.商店每售出一单位商品可得利润100元，若需求量超过进货量，商店可从其他商店调剂供应，这时每单位商品可得利润50元，若进货量超过需求量，每单位商品需支付库存20元。试计算此商店经营该商品每周平均获利。

解：

$$Z=\begin{cases}100X+50(15-X) & 10\le X<15\\ 1500-20(X-15) & 15\le X<20\end{cases}$$

$EZ=1412.5$

随机事件与概率

- 概率的定义与性质
- 古典概型与几何概型
- 条件概率与全概率公式、贝叶斯公式
- 事件的独立性

- 例：在伯努利试验中，事件A出现的概率为p，求n次试验中事件A出现奇数次的概率？
- 解：

$$P_{奇}=\sum_{k为奇}C_n^k p^k q^{n-k},P_{偶}=\sum_{k为奇}C_n^k p^k q^{n-k}$$

$$P_{奇}+P_{偶}=1,P_{偶}-P_{奇}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(-p)^k q^{n-k}=(q-p)^n$$

$$P_{奇}=[1-(1-2p)^n]/2$$

- 例：有4个工人生产同一种产品,某天他们分别生产了这种产品的20%, 10%, 40%, 30%. 如果已知他们的产品的次品率分别为0.1, 0.15, 0.2, 0.05, 今从混在一起的这批产品中任取一件,(1)求它恰为次品的概率;(2)若已知取出的是次品,求它是第一个工人生产的概率。
- 解： $P(B)=0.1*20\%+0.15*10\%+0.2*40\%+0.05*30\%=0.13$

$$P(A_1 \mid B)=\frac{P(A_1)P(B \mid A_1)}{P(B)}=\frac{2}{13}$$

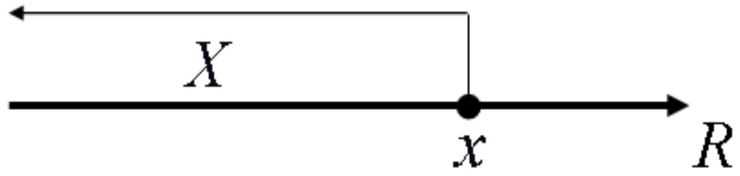
随机变量及其分布函数

- 随机变量及其分布函数的定义
- 离散型随机变量（二项分布、泊松分布、几何分布）
- 连续性随机变量（均匀分布、指数分布、正态分布）
- 如何求随机变量函数的分布

- **定义**：设X是一随机变量，x是任意实数，称函数

$$F(x)=P(X\leq x)$$

为随机变量X的**分布函数**。



$P(X\leq x)=F(x)$　　　　$P(X>x)=1-F(x)$

$P(a<X\leq b)=F(b)-F(a)$

- 例：设某种电子元件寿命X的密度函数为

$$p(x)=\begin{cases} a/x^2 & x>100 \\ 0 & x<100 \end{cases}$$

求：1).a；2).P(X>200)

- 解：a=100；P(X>200)=1/2.

$$F(x)=\int_{100}^{x}\frac{a}{x^2}dx=-\frac{a}{x}\Big|_{100}^{x}$$

$$=-\frac{a}{x}+\frac{a}{100}$$

$$=a\left(\frac{1}{100}-\frac{1}{x}\right)$$

$$F(+\infty)=a\left(\frac{1}{100}-0\right)=1\Rightarrow a=100$$

$$\Rightarrow F(x)=1-\frac{100}{x}.$$

$$P(X>200)=1-P(X\le 200)$$

$$=1-F(200)$$

$$=\frac{1}{2}.$$

$p_X(x)=2e^{-2x}$ $X\sim E(2)$ $X\in[0,+\infty)$

$p_Y(y)=p_X(f^{-1}(y))\,|f^{-1}(y)'|$ $Y=1-e^{-2X}\downarrow$ $Y\in[0,1]$

$=2e^{-2\cdot -\frac{1}{2}\ln(1-y)}\left|-\frac{1}{2}\frac{-1}{(1-y)}\right|$ $e^{-2X}=1-Y$ $-2X=\ln(1-Y)$ $-\frac{1}{2}\ln(1-Y)$

- 例：设随机变量X服从参数为2的指数分布，求证Y=1-exp(-2X)服从[0，1]上的均匀分布。
- 解：当0≤y<1时 $=2(1-y)\frac{1}{2(1-y)}=1$ $F(Y)=\int_0^y 1\,dy=y\sim U[0,1]$

$$F(y)=P(Y\le y)=P(1-\exp(-2X)\le y)$$

$$=P(X\le -\ln(1-y)/2)=1-\exp\{2\ln(1-y)/2\}=y$$

- 当y<0时，F(y)=0
- 当y≥1时，F(y)=1

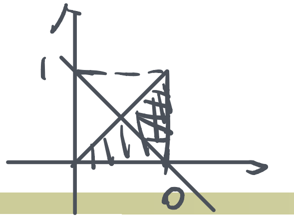
随机向量及其分布

- 随机向量及其分布函数的定义
- 离散型随机向量与连续性随机向量
- 边缘分布与条件分布（不考）
- 随机变量的独立性
- 如何求随机向量函数的分布

- **定义:** 设（X，Y）是二维随机向量,对于任意的实数x，y，称二元函数

$$F(x，y)=P(X\le x, Y\le y)$$

为二维随机向量（X，Y）的**分布函数**，或称为（X，Y）的**联合分布函数.**



$F(+\infty,+\infty)=\int_0^1\int_0^x a(x+y)\,dy\,dx$ $\quad xy+\frac{1}{2}y^2\Big|_0^x$

$=a\int_0^1 \frac{3}{2}x^2\,dx = \frac{a}{2}x^3\Big|_0^1 = \frac{a}{2}=1 \Rightarrow a=2$

- 例：设二维随机向量（*X*，*Y*）的密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases} a(x+y), & 0\le y\le x\le 1 \\ 0, & 其它 \end{cases}$$

$p_X(x)=\int_0^x 2x+2y\,dy = 2xy+y^2\Big|_0^x$

$= 3x^2 \quad 0<x<1$

求（1）常数*a*；（2）X与Y的边缘密度；（3）（*X*，*Y*）落在区域$G=\{(x,y)|x+y>1\}$内的概率.

$y=1-x$

$p_Y(y)=\int_y^1 2x+2y\,dx = x^2+2xy\Big|_y^1$

$=1+2y-3y^2$

$(0<y<1)$

解：$1.a=2;$

$$2.p_X(x)=\begin{cases} 3x^2 & 0<x<1 \\ 0 & 其他 \end{cases};\quad p_Y(y)=\begin{cases} 1+2y-3y^2 & 0<y<1 \\ 0 & 其他 \end{cases}$$

$3.P=2/3$

$P=\int_{\frac{1}{2}}^1\int_{1-x}^x 2x+2y\,dy\,dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 2xy+y^2\Big|_{1-x}^x dx =$

$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} 3x^2 - 2x(1-x) - (1-x)^2\,dx$

$3x^2 + 2x^2 - \cancel{2x} + \cancel{2x} - 1 - x^2$

$\int_{\frac{1}{2}}^{1} 4x^2 - 1\,dx$

$= \frac{4}{3}x^3 - x \Big|_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{4}{3} - 1 - \left(\frac{1}{8}\cdot\frac{4}{3} - \frac{1}{2}\right)$

$\frac{1}{6} - \frac{3}{6} = -\frac{1}{3}$

$= \frac{2}{3}.$

- 例：设随机变量X,Y相互独立，等可能地取1,2,3。令U=max{X,Y}，V=min{X,Y}，求(U,V)的联合分布律。

Y \ X	1	2	3
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$
2	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$
3	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$

- 解：P(U=1,V=1)=P(X=1,Y=1)=1/9

  P(U=1,V=2)=P(U=1,V=3)=0

  P(U=2,V=1)=P({X=2,Y=1}或{X=1,Y=2})=2/9

  P(U=2,V=2)=1/9,…….

V \ U	1	2	3
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$
2	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$
3	0	0	$\frac{1}{9}$

$U \backslash V$	1	2	3
1	1/9	0	0
2	2/9	1/9	0
3	2/9	2/9	1/9

$F_{X_i}(x_i) = 1 - e^{-x_i}$

例：设$X_1,\ldots,X_n$相互独立，服从参数为$\lambda_1,\ldots,\lambda_n$的指数分布，求$\min(X_1,\ldots,X_n)$的分布。

$\min(x_1,\cdots,x_n)$

$= 1 - (1-F_{X_1}(x_1))(1-F_{X_2}(x_2))\cdots(1-F_{X_n}(x_n))$

$= 1 - e^{-x_1}e^{-x_2}\cdots e^{-x_n} = 1 - e^{-(x_1+\cdots+x_n)}$

数字特征

- 期望（定义与性质）
- 随机变量函数的期望
- 方差（定义与性质）
- 协方差与相关系数

- 关键：熟悉上述数字特征的定义，计算公式及基本性质。

- 数学期望的定义：
- 1.设X为离散型随机变量，其分布律为

$$P(X=x_k)=p_k,\quad k=1,2,\ldots$$

则

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$$

- 2.设X为具有密度函数$p(x)$的随机变量，则

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx$$

$F_Z(z)=\Phi(z)^2$

$p_Z(z)=2\Phi(z)\varphi(z)$.

$E\max\{X,Y\}=\int_{-\infty}^{+\infty} x\,2\Phi(x)\varphi(x)\,dx$

- **例：** 已知随机变量X,Y服从N(0,1)，相互独立。试求 *E*(max{X,Y})

$E\max\{X,Y\}=\iint \max\{X,Y\}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy$

$=\iint_{x>y}\cdots+\iint_{x<y}\cdots$

- **解：** $\because \max\{X,Y\} \sim 2\Phi(x)\varphi(x)$

$$E\max\{X,Y\}=\int_{-\infty}^{+\infty} x2\Phi(x)\varphi(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}xe^{-x^2/2}\Phi(x)dx$$

分部积分，第一项为0.

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\Phi(x)d(-e^{-x^2/2})=\int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-x^2/2}d\Phi(x)$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-x^2/2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}dx=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}}e^{-\frac{x^2}{2\times\frac{1}{2}}}dx=\frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

- 例：某城市的市民在一年内遭受交通事故的概率为千分之一。为此，一家保险公司决定在这个城市新开一种交通事故险，每个投保人每年交付保险费18元，一旦发生事故，将得到1万元的赔偿。经调查，预计有10万人购买这种险种。假设其他成本共40万元。求（1）保险公司亏本的概率是多少？（2）平均利润为多少？
- 解：设理赔人数X~B(100000,0.001)，则保险公司收入180-40-X（万元）。亏本概率为

$$P(140 - X \le 0) = P\left(\frac{X - 100000 * 0.001}{\sqrt{100000 * 0.001 * 0.999}} > \frac{140 - 100}{\sqrt{100 * 0.999}}\right) \approx 1 - \Phi(4)$$

- 平均利润E(180-40-X)=40

利用数学期望的性质求期望

- **例：** 将n个球随机放入M个盒子，求有球的盒子数X的期望。
- **解：** 设X $=\sum_{i-1}^{M} X_i$,其中$X_i=\begin{cases}1 & 第i个盒子有球\\ 0 & 第i个盒子无球\end{cases}$

$$EX=E\sum_{i-1}^{M} X_i=\sum_{i-1}^{M} EX_i$$(注意这里X_i是不独立的）。

$$\mathrm{P}(X_i=0)=(1-1/M)^n,$$

$$EX_i=P(X_i=1)=1-(1-1/M)^n;$$

$$EX=M[1-(1-1/M)^n]$$

- **方差的定义：** 设X是随机变量，则X的方差

$$D(X)=E[X-E(X)]^2=E(X^2)-(EX)^2$$

- **注：** 该计算公式经常使用。

- 协方差的定义： $E[(X-EX)(Y-EY)]$称为随机变量X与Y的协方差，记为$\mathrm{Cov}(X, Y)$。即

$$\mathrm{Cov}(X, Y)= E[(X-EX)(Y-EY)]$$

- 协方差的一般计算公式：

$$\mathrm{Cov}(X, Y)= E(XY)- E(X)E(Y)$$

- **相关系数的定义：** 若随机变量X与Y的方差存在且均不为0，则称

$$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$$

为随机变量 X,Y的相关系数。

注：$\rho_{XY}=Cov(\frac{X-EX}{\sqrt{DX}},\frac{Y-EY}{\sqrt{DY}})$

- 例：已知随机变量X，Y的方差分别为D(X)=16，D(Y)=25，X，Y的相关系数$\rho_{XY}=1/2$，求D(X+Y)和D(X-Y)。
- 解：

$$\operatorname{cov}(X,Y)=\rho_{XY}\sqrt{DXDY}=10;$$

$$D(X+Y)=DX+DY+2\operatorname{cov}(X,Y)=61;$$

$$D(X-Y)=DX+DY-2\operatorname{cov}(X,Y)=21.$$

- 例：设随机变量X_1，X_2，…，X_{m+n}是相互独立的，有相同的分布并且有有限的方差，令

σ^2

$$S=\sum_{i=1}^{m+n}X_i,\ T=\sum_{i=m+1}^{m+n}X_i$$

$$\rho_{ST}=\frac{cov(S,T)}{\sqrt{DS}\sqrt{DT}}=\frac{cov(\sum_{i=1}^{m+n}X_i,\sum_{i=m+1}^{m+n}X_i)}{}$$

$$=\frac{D(\sum_{i=m+1}^{m+n}X_i)}{\sqrt{(m+n)\sigma^2}\sqrt{n\sigma^2}}=\frac{n\sigma^2}{\sqrt{n}\sqrt{m+n}\sigma^2}=\sqrt{\frac{n}{m+n}}$$

求S与T之间的相关系数。

- 解：

$$\rho_{ST}=\frac{Cov(\sum_{i=1}^{m+n}X_i,\sum_{i=m+1}^{m+n}X_i)}{\sqrt{D(\sum_{i=1}^{m+n}X_i)\cdot D(\sum_{i=m+1}^{m+n}X_i)}}=\frac{n\sigma^2}{\sqrt{(m+n)n\sigma^4}}=\sqrt{\frac{n}{m+n}}$$